

Pumping の補題に関する証明

有限オートマトン M は言語 L を受理するものとする。また、 M の状態数を n とする。いま、 L の文の内、文字列長が n 以上のものを1つとりだし、それを Z と呼ぶこととする。

$$Z = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots a_m$$

一方、この文字列は M により受理されることより、 M はこの文字列に対して以下のような状態遷移を行う。

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \xrightarrow{a_3} q_3 \cdots \xrightarrow{a_{m-1}} q_{m-1} \xrightarrow{a_m} q_m$$

この図において、 q_0 は初期状態であり、 q_m は最終状態の1つである。

いま、 M の状態は n 個しかなく、かつ、 $n < m$ であるので、 $q_0, q_1, q_2, q_3, \cdots, q_m$ の m の状態の列の中には同じ状態が複数存在している。その内の2つの状態を q_i と q_j とすると、この間の入力文字列は $a_{i+1}, a_{i+2}, \cdots, a_j$ である。これを V とすると、もとの入力文字列全体 Z は $Z = uvw$ の3つに分割した形にかける。このことより、 $uv^k w$ も L に属することがわかる。以上、証明終わり。